Wir modifizieren den Begriff der Dominanz, um im Fall nicht-integraler Gewichte die $W_{[\lambda]}$-Wirkung richtig zu behandeln:

Def. 3.9 Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Dann heißt λ

antidominant, falls $\forall \alpha \in \Phi^+ : \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \mathbb{Z}_{>0}$

dominant, ~~falls~~ $\forall \alpha \in \Phi^+ : \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \notin \mathbb{Z}_{<0}$.

λ dominant $\Leftrightarrow$ $-\lambda$ antidominant.

Falls $\lambda \in \Lambda$: λ dominant $\Leftrightarrow$ $\lambda \in \Lambda_+ - \rho$.

Prop 3.10 Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Dann ist λ antidominant genau dann, wenn λ das kleinste Element von $W_{[\lambda]} \cdot \lambda$ ist. Diese Bahn enthält (genau) ein solches Element.

Präziser: Ist $\Delta_{[\lambda]} \subseteq \Phi_{[\lambda]}$ das einfache System zum positiven System $\Phi^+ \cap \Phi_{[\lambda]} \subseteq \Phi_{[\lambda]}$, so sind äquivalent:

(1) λ ist antidominant (2) $\forall \alpha \in \Delta_{[\lambda]} : \langle \lambda + \rho, \alpha^\vee \rangle \leq 0$

(3) $\lambda \leq s_\alpha \cdot \lambda \quad \forall \alpha \in \Delta_{[\lambda]}$ (4) $\lambda \leq w \cdot \lambda \quad \forall w \in W_{[\lambda]}$.

Beweis: Sei $\mu \overset{= w \cdot \lambda}{\in} W_{[\lambda]} \cdot \lambda$ minimal und $\alpha \in \Phi^+$. Wäre $\langle \mu + \rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}_{>0}$, so wäre $s_\alpha \cdot \mu = \mu - n \cdot \alpha < \mu$, und

$$s_\alpha w \cdot \lambda - \lambda = s_\alpha \cdot \mu - \lambda = -n \cdot \alpha + \mu - \lambda \equiv 0 \ (\Lambda_r)$$

also $s_\alpha w \in W_{[\lambda]}$, Widerspruch!

Da α beliebig war, ist also ~~[illegible]~~ antidominant.

$(1) \Rightarrow (2)$: Sei $\alpha \in \Delta_{[\lambda]} \subseteq \Phi_{[\lambda]}$. Dann ist $\langle \lambda+\rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$,

aber $\notin \mathbb{Z}_{>0}$, also ≤ 0.

$(2) \Rightarrow (1)$: Sei $\alpha \in \Phi^+$ mit $\langle \lambda+\rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\alpha \in \Phi_{[\lambda]}$.

Nach Theorem 3.8. ist $\alpha = \sum_{\beta \in \Delta_{[\lambda]}} n_\beta \cdot \beta$ mit $n_\beta \in \mathbb{N}$.

Folglich $\langle \lambda+\rho, \alpha^\vee \rangle = \sum_\beta n_\beta \underbrace{\langle \lambda+\rho, \beta^\vee \rangle}_{\leq 0} \leq 0$, also

λ antidominant.

$(2) \Leftrightarrow (3)$. Es gilt $s_\alpha \cdot \lambda = \lambda - n \cdot \alpha$ mit $n = \langle \lambda+\rho, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$.

Folglich $s_\alpha \cdot \lambda - \lambda \geq 0 \Leftrightarrow -n \cdot \alpha \geq 0 \overset{\alpha \text{ einfach}}{\Leftrightarrow} n \leq 0$ ~~[illegible]~~.

$(4) \Rightarrow (3)$ ✓

$(3) \Rightarrow (4)$ Induktion nach $\ell(w)$, $w \in W_{[\lambda]}$: $\ell(w) = 0$ ✓

(Länge relativ $\Delta_{[\lambda]}$)

$\ell(w) > 0$, $w = w' s_\alpha$, $w' \in W_{[\lambda]}$, $\ell(w') \leq \ell(w) - 1$, $\alpha \in \Delta_{[\lambda]}$.

Aus der allg. Theorie von Coxetergruppen: $\ell(w' s_\alpha) > \ell(w') \Leftrightarrow w\alpha < 0$

$\Leftrightarrow w'\alpha > 0$

Weiter

$$\lambda - w \cdot \lambda = \lambda - w' \cdot \lambda + w' \cdot \lambda - w \cdot \lambda$$

$$= \lambda - w' \cdot \lambda - \rho + w'(\lambda+\rho) + \rho - w' s_\alpha(\lambda+\rho)$$

$$= \underbrace{\lambda - w' \cdot \lambda}_{\leq 0 \text{ (IV)}} + w'\underbrace{(\lambda+\rho - s_\alpha(\lambda+\rho))}_{\lambda - s_\alpha \cdot \lambda = \langle \lambda+\rho, \alpha^\vee \rangle \alpha} \leq \underbrace{\langle \lambda+\rho, \alpha^\vee \rangle}_{\leq 0} \overbrace{w'\alpha}^{\geq 0} \leq 0$$ □.

Übung 3.11 Man zeige: Ist $\lambda + \mathfrak{h}^*$ antidominant, so ist $M(\lambda) = L(\lambda)$.

<u>Lösung 3.11</u>: Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ antidominant.

Für jeden Kompositionsfaktor $L(\mu)$ von $M(\lambda)$ gilt

$\mu \in W \cdot \lambda \cap (\lambda + \Lambda_r) = W_{[\lambda]} \cdot \lambda$ und $\mu \leq \lambda$,

also $\mu = \lambda$! nach Prop. 3.10 Andererseits hat $L(\lambda)$ die Vielfachheit 1

und tritt als Untermodul auf (Theorem 3.5). Dies

zeigt die Behauptung.

Bem. 3.12 Sei ~~…~~ $\lambda \in \mathfrak{h}^* \setminus \Lambda$. Dann ist

$$W \cdot \lambda = \coprod_{r=1}^{m} W_{[\mu_i]} \mu_i$$ für gewisse Repräsentanten

μ_i der Δ_r - Nebenklassen in $W \cdot \lambda$. ~~Weiter~~ O.B.d.A.

sind die μ_i antidominant. Sei

$\mathcal{O}_{\mu_i}$ = volle Unterkat. von $\mathcal{O}_{\chi_\lambda}$ der Moduln M

mit $\Pi(M) \subseteq \mu_i + \Delta_r$.

Dann gilt $\mathcal{O}_\chi = \bigoplus_{r=1}^{m} \mathcal{O}_{\mu_i}$. Später werden wir sehen,

dass dies genau die Blöcke von $\mathcal{O}_\chi$ sind.

Standard - Filtrierungen

Def. 3.13 Sei $M \in \mathcal{O}$. Wir sagen, M habe eine Standard-Filtrierung (Verma-Fahne), falls $\exists\, 0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_m = M$

mit $\forall i: M^i = M_i / M_{i-1} = M(\lambda_i)$. Die Vielfachheit von $M(\lambda)$ in einer solchen Filtrierung wird mit $(M : M(\lambda))$ bezeichnet.

(Beachte $\mathrm{ch}\, M = \sum_i \mathrm{ch}\, M(\lambda_i)$.)

Theorem 3.14 Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ und F endlich-dim. $\mathfrak{g}$-Modul.

Dann besitzt $M(\lambda) \otimes F$ eine Standardfiltrierung mit

mit $\quad (M(\lambda)\otimes F : M(\nu)) = \begin{cases} \dim F_\mu & \nu = \lambda+\mu,\ \mu\in\Pi(F) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Es gilt $\forall$ $\mathfrak{b}$-Moduln L, $\forall$ $\mathfrak{g}$-Moduln N:

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\big((\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} L)\otimes_{\mathbb{C}} F,\ N\big) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} L,\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F,N)\big)$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}\big(L,\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(F,N)|_{\mathfrak{b}}\big) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{b}}\big(L\otimes_{\mathbb{C}} F|_{\mathfrak{b}},\ N\big)$$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}(L\otimes_{\mathbb{C}} F|_{\mathfrak{b}}),\ N\big)$$

$$\Rightarrow \quad (\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} L)\otimes_{\mathbb{C}} F \ \cong_{\mathfrak{g}}\ \mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}(L\otimes_{\mathbb{C}} F|_{\mathfrak{b}}).$$

Sei nun $\dim L < \infty$ und $v_1,\dots,v_n$ eine Basis von Gewichtsvektoren für $N := L\otimes_{\mathbb{C}} F|_{\mathfrak{b}}$, geordnet, s.d. $i > j \Rightarrow \nu_i \not\leq \nu_j$ (ν_i = Gewicht von v_i)

Sei $N_k := \mathcal{U}(\mathfrak{b})\langle v_{n-k+1},\dots,v_n\rangle \subseteq N_{k+1} \cdots \subseteq N_n = N$

Mit $M_k := \mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})} N_k$ ist

$$M_k/M_{k-1} \overset{!}{\cong} \mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}\big(\overbrace{N_k/N_{k-1}}^{\cong\ \mathbb{C}v_k}\big) = M(\nu_k)$$

$\mathcal{U}(\mathfrak{g})\otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}(-) \cong_{\mathfrak{h}} \mathcal{U}(\mathfrak{n}^-)\otimes_{\mathbb{C}}(-)$ exakt

Insbesondere ist für $L = \mathbb{C}_\lambda$

$$(M(\lambda) \otimes F : M(\lambda + \mu)) = \dim F_\mu .$$

$\square$

13.12.2013 XV

<u>Prop. 3.15</u> $M \in \mathcal{O}$ habe eine Standard-Filtrierung

(1) Ist $\lambda \in \Pi(M)$ maximal, so hat M einen Untermodul vom Typ $M(\lambda)$, und $M / M(\lambda)$ hat eine Std-Filtrierung.

(2) Ist $M = M' \oplus M''$ in $\mathcal{O}$, so haben M', M'' Std-Filtrierungen

(3) M ist ein freier $\mathcal{U}(n^-)$-Modul.

<u>Beweis:</u> (1) Nach Voraussetzung $\exists$ $\phi : M(\lambda) \xrightarrow{\mathcal{U}(g)} M$, $\phi \neq 0$.

Sei (M_i) Std-Filt und i <u>minimal</u> mit $\phi(M(\lambda)) \subseteq M_i$,

d.h. $\tilde{\phi} : M(\lambda) \to M^i = M_i / M_{i-1}$, $\tilde{\phi} \neq 0$. $\Rightarrow \lambda \leq \mu$.

$$M^i \cong M(\mu)$$

λ maximal $\Rightarrow$ $\lambda = \mu$. $\Rightarrow$ $\tilde{\phi}$ Iso. $\Rightarrow$ ϕ injektiv.

Man hat eine keS: $0 \to M_{i-1} \to M / M(\lambda) \to M / M_i \to 0$

$(M_{i-1} \cap M(\lambda) = 0)$. M_{i-1}, M / M_i haben Std-Filt $\rightsquigarrow$ auch $M / M(\lambda)$.

(2) Induktion nach der Länge n der Filt. Wenn $n = 1$, hat man $M = M(\lambda)$ nach (1), unzerlegbar.